コラッツ予想について　$ver.1.35$ 2023/07/24　成清　慎

【概　要】

本ドキュメントは

$f(x) := 3 \times x + 1$, $(2a+1) \times 3 + 1 = 6a + 4$, $f(2a+1) = 6a + 4$,

$\therefore$ $f: \{2a+1 | a \in \mathbb{N}^0\} \to \{6a+4 | a \in \mathbb{N}^0\}$,

$f^{-1}: \{6a+4 | a \in \mathbb{N}^0\} \to \{2a+1 | a \in \mathbb{N}^0\}$

は全単射である …(1)

と

$\{(2a+1) \times 2^{h''} | a, h'' \in \mathbb{N}^0\} = \mathbb{N}^1$ (0を含まない全自然数の集合に等しい。何故ならばすべての0を含まない全自然数は2で割り切れる限り2で割り続ければ必ず割り切れなくなって奇数となるから。) …(2)

により

$D(2a_x+1) \coloneqq \{(2a_x+1) \times 2^{h''} | 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$,

($2a_x+1$ は1以外の正奇数で任意定数)

$S := \mathbb{N}^1 - D(2a_x+1)$

：$\left\{(2a_x+1) \times 2^{h''} \middle| 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\right\}$ を $D(2a_x+1)$ として

S を $D(2a_x+1)$ 以外の0を含まない全自然数の集合として定義する。

$S \supset \{(2a_{p-1}+1) \times 2^{h''} | \, h'' \in \mathbb{N}^0\} \not\ni f(2a_{p-1}+1) = (6a_{p-1}+4) \in D(2a_p+1)$

ならば ($2a_p + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む)

$D(2a_p+1) \coloneqq D(2a_x+1) \cup \{(2a_{p-1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$S := \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$ とそれぞれ再定義する。…(a)

または

$D(2a_p+1) \not\ni f(2a_p+1) = (6a_p+4) \in \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$

ならば ($2a_p + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む)

$D(2a_{p+1}+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_{p+1}+1)$, $D(2a_p+1) = \emptyset$(空集合) として

それぞれ再定義する。…(b)

…(a), …(b) の操作はともに一度実行されれば実行可能な条件を満たさなくなるから二度と実行されない。

したがって

$\mathbb{N}^1 = D(2a_n+1) \cup S$ がその中に重複項を持たないとすれば

上記の操作を繰り返すことによって後述の例外に該当しない限り $\mathbb{N}^1$ 中唯一 $\emptyset$ (空集合) ではない $D(2a_n+1)$ はその中に重複項を持たず、$D(2a_n+1)$ に含まれるすべての元は奇数なら3倍して1を足し偶数なら2で割るというコラッツ予想の題意のとおりの演算を有限回繰り返しても元の数と同じ数となって循環することはなく、$2a_n+1$ となる。

以上のこと等によってすべての有限値をもった自然数はコラッツ予想の題意のとおりの演算を有限回繰り返せば1となるというコラッツ予想の題意の真偽を検証しようと試みるものです。

【定義 1】

$\mathbb{N}^1$:全ての 0 を含まない自然数全体の集合（ただしその中に重複項をもたず、多重集合としてみた場合すべての元の重複度は 1 であるとする。）

$\mathbb{N}^0$:全ての 0 を含んだ自然数全体の集合（〃）

$\mathbb{Z}$:全ての 0 を含む整数全体の集合

a_n, x_m, y_0, h_{mn} …:右下の小文字によって修飾されている変数名は特に変域の指定がなければ$\mathbb{N}^0$にふくまれて唯一存在する任意定数または他の任意定数に直接または間接的に依存して定まる固定値をもった定数を表す。固定値をとるものして扱われるため集合表記の中の定義域の別途指定はこれを省略する場合がある。

例：$\{2a_x + y \mid y \in \{0,1,2\}\} = \{2a_x + 0\,, 2a_x + 1\,, 2a_x + 2\}$

$\{2a_x + y \mid y \in \mathbb{N}^0\} = \{2a_x + 0\,, 2a_x + 1\,, 2a_x + 2\,, 2a_x + 3\,, 2a_x + 4\ \ldots\}$

a, x, y, h …. ：右下の小文字による修飾を伴わない変数名は特に変域指定が無ければ $\mathbb{N}^0$(全ての 0 を含む自然数全体の集合）をわたる値をとりうる普通の変数を表す。この場合変域指定の $\in \mathbb{N}^0$は省略されることがある。

$f(x) := 3x + 1$

$e(2a_0 + 1, n) \ := \ (2a_0 + 1 + \frac{1}{3}) \times 4^n - \frac{1}{3}$

初項 $2a_0 + 1$, 漸化式 $2a_{n+1} + 1 = (2a_n + 1) \times 4 + 1$ の漸化数列の第 n 項 $a_n + 1$ (初項 $2a_0 + 1$ は第 0 項）

$Oparation\ Collatz\ Setup(2a_x + 1),\ O.C.S(2a_x + 1)$

$: D(2a_x + 1) := \{(2a_x + 1) \times 2^{h''} \mid 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$\mathrm{S} := \mathbb{N}^1 - D(2a_x + 1)$ （$2a_x + 1$ は 1 以外の正奇数で任意定数。）

：$\{(2a_x + 1) \times 2^{h''} \mid 2a_x + 1 \neq 1,\ h'' \in \mathbb{N}^0\}$を $D(2a_x + 1)$として、$D(2a_x + 1)$以外の$\mathbb{N}^1$ (全ての 0 を含まない自然数全体の集合）を S としてそれぞれ定義する。

以上の操作を$Operation\ Collatz\ Setup(2a_x + 1)$略して $O.C.S.(2a_x + 1)$と呼ぶこととする。

$Operation\ Collatz\ Invite(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1),\ O.C.I.(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$

$: D(2a_x + 1) \supset \{(2a_n + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \ni (2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}} = 6a_{n-1} + 4$

$D(2a_x + 1) \not\ni f^{-1}((2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}) = 2a_{n-1} + 1$

$\in \{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S \ \subset \ \mathbb{N}^1 \Rightarrow$

：$(2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}$が $D(2a_x + 1)$の真部分集合である$\{(2a_n + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれ、$f^{-1}((2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}) = 2a_{n-1} + 1$ が $\mathbb{N}^1$の真部分集合である Sの真部分集合 $(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて存在すれば ($2a_n + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む）

$D(2a_x + 1) := D(2a_x + 1) \cup \{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$\mathrm{S} := \mathbb{N}^1 - D(2a_x + 1)$

：$D(2a_x + 1)$を $D(2a_x + 1)$と $\{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$の和集合として、S を $D(2a_x + 1)$以外の $\mathbb{N}^1$としてそれぞれ定義する。

以上の操作を$Operation\ Collatz\ Invite(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$略して $O.C.I.(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$と呼ぶこととする。

$Operation\ Collatz\ Hijack(2a_{x+1} + 1, 2a_x + 1),\ O.C.H.(2a_{x+1} + 1, 2a_x + 1)$

$: D(2a_x + 1) \ni 2a_x + 1$

$D(2a_x + 1) \not\ni f(2a_x + 1) = (2a_{x+1} + 1) \times 2^{h_{(x+1)y}} = 6a_x + 4$

$\in \{(2a_{x+1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S \ \subset \ \mathbb{N}^1 \Rightarrow$

：$2a_x + 1$ が $D(2a_x + 1)$に含まれ、

$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_{x+1}+1)\times 2^{h_{(x+1)y}}$
が $\mathbb{N}^1$の真部分集合である Sの真部分集合
$\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$に含まれて存在すれば
$D(2a_{x+1}+1)\coloneqq D(2a_x+1)\cup\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\mathrm{S}\coloneqq\mathbb{N}^1-D(2a_{x+1}+1)$,　$D(2a_x+1)\coloneqq\emptyset$(空集合)
：$D(2a_{x+1}+1)$を $D(2a_x+1)$ と $\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
の和集合として
Sを $D(2a_{x+1}+1)$以外の $\mathbb{N}^1$としてまた $D(2a_x+1)$を
$\emptyset$(空集合)としてそれぞれ定義する。
以上の操作を $Operation\ Collatz\ Hijack(2a_{x+1}+1,2a_x+1)$略して
$O.C.H.(2a_{x+1}+1,2a_x+1)$と呼ぶこととする。

〖命題 1_1〗
$\{(2a+1)\times 2^{h''}|a,h''\in\mathbb{N}^0\}=\mathbb{N}^1$

：正の奇数 $2a+1$を初項とする公比 2の等比数列すべて
の集合は全ての 0を含まない自然数の集合 $\mathbb{N}^1$に等しい。
〖証明 1_1〗
全ての 0を含まない偶数は 2で割り切れる限り 2で割り続けて
いけば必ず割り切れなくなって奇数となるから。

〖命題 1_2〗
f： $\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}$
は全単射である。
〖証明 1_2〗
$f(2a+1)=(2a+1)\times 3+1=6a+4$
$f^{-1}(6a+4)=(6a+4-1)\div 3\ =2a+1$
$\therefore$　f： $\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}$
は全単射である。

〖命題 1_3〗
$(6a+1)\times 2^{2h+2}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
$(6a+3)\times 2^{h}\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^1)$
$(6a+5)\times 2^{2h+1}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
〖証明 1_3〗
$6a+2\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+2)\times 2^1=12a+4=6(2a)+4\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+4)\times 2^1=12a+8=6(2a+1)+2\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+1)\times 2^1=12a+2=6(2a)+2\ \notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+5)\times 2^1=12a+10=6(2a+1)+4\ \in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+3)\times 2^1=12a+6=6(2a+1)+3\ \notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$\therefore$
$(6a+1)\times 2^{2h+2}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
$(6a+3)\times 2^{h}\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^1)$
$(6a+5)\times 2^{h+1}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$

〖命題 1_4〗
$f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$
$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$

〖 証 明 1_4 〗

$(4a+3)\times 3+1=12a+10$

$(12a+10)\div 2^1=6a+5$

$(8a+1)\times 3+1=24a+4$

$(24a+4)\div 2^2=6a+1$

$(2a+1)\times 3+1=6a+4$

$(2a+1)\times 4+1=e(2a+1,1)$
$=8a+5$
$(8a+5)\times 3+1=24a+16$
$=(6a+4)\times 2^2$
$\therefore\quad f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$
$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$

〖 命 題 1_5 〗

$f(2a_x+1)\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\Rightarrow$
$2a_x+1=1,\ h''=2$ (ただし $2a_x+1$ は $\mathbb{N}^0$ を定義域とする任意定数)
：$f(2a_x+1)$ が $\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$ に含まれているとすれば
$2a_x+1=1, h''=2$ である。

〖 証 明 1_5 〗

$f(2a+1)=6a+4$
$6a+4\div 2^{h''}=2a+1$
$\frac{(2a+1)\times 3+1}{2^{h''}}=2a+1$
$(2a+1)\times\left(2^{h''}-3\right)=1$
$\therefore a=0,\ 2a+1=1,\ h''=2$

〖 命 題 1_5 補 足 〗

以上により
$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_x+1)\times 2^{h_{xy}}\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
のように初項 $\times 3+1$ を自分自身の中に持つような正奇数を初項とする公比 2 の等比数列の集合は初項を 1 とする $\{1\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$ 以外には存在しない。

〖 命 題 1_6 〗

$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$
$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,\ 2a_{-1}+1\neq 1\Rightarrow$
$2a_{-1}+1\neq 2a_1+1$
：$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$ ，$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,$
となるとき $2a_{-1}+1$ が 1 でなければ $2a_{-1}+1$ と $2a_1+1$ は等しくない。

〖 証 明 1_6 〗

$2a_{-1}+1=2a_1+1$ と置けば
$\frac{(2a_{-1}+1)\times 3+1}{2^{h_0}}=2a_0+1$
$\frac{(2a_{-1}+1)\times 3^2+3+2^{h_0}}{2^{h_0+h_1}}=2a_{-1}+1$
$3+2^{h_0}=(2a_{-1}+1)\cdot(2^{h_0+h_1}-3^2)$
$\frac{3+2^{h_0}}{2^{h_0+h_1-3^2}}=2a_{-1}+1$
$\therefore 2a_{-1}+1=1\,,h_0=2,h_1=2$

$\therefore f(2a_{-1}+1) \div 2^{h_0} = 2a_0 + 1$

$f(2a_0+1) \div 2^{h_1} = 2a_1 + 1,\ 2a_{-1}+1 \neq 1 \Rightarrow$

$2a_{-1}+1 \neq 2a_1 + 1$

：$f(2a_{-1}+1) \div 2^{h_0} = 2a_0 + 1$

$f(2a_0+1) \div 2^{h_1} = 2a_1 + 1,$

となるとき $2a_{-1}+1$ が 1 でなければ

$2a_{-1}+1$ と $2a_1+1$ は等しくない。

〖命題 1_6 補足〗

以上により

$f(2a_0+1) = 6a_0 + 4 = (2a_1+1) \times 2^{h_{1x}}$

$\in \{(2a_1+1) \times 2^{h''} | a_1 \in \mathbb{N}^1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$f(2a_1+1) = 6a_1 + 4 = (2a_0+1) \times 2^{h_{0y}}$

$\in \{(2a_0+1) \times 2^{h''} | a_0 \in \mathbb{N}^1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

のように初項 $\times 3+1$ を相互に持ち合うような相異なる正奇数を初項とする公比 2 の等比数列の集合の対は存在しない。

〖命題 1_7〗

$\exists\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset \mathbb{N}^1, 2a_n+1 \neq 2a_m+1 \Rightarrow$

$\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap \forall\{(2a_m+1) \times 2^{h''}\} = \emptyset$（空集合）

：ある$\mathbb{N}^1$の真部分集合で正奇数 $2a_n+1$ を初項とし、

公比 2 の等比数列全ての集合 $\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | n, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

があって、$2a_n+1 \neq 2a_m+1$ ならば如何なる正奇数 $2a_m+1$

を初項とし、公比 2の等比数列全ての集合

$\{(2a_m+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$ とも互いに素で両者は共有項を

持たない。

（$\mathbb{N}^1$の真部分集合であるすべての正の奇数を初項とする

公比 2の等比数列すべての集合はその中のどの二つの集合

をとっても互いに素で両者は共通項をもたない。）

〖証明 1_7〗

命題 1—1

$\{(2a+1) \times 2^{h''} | a, h'' \in \mathbb{N}^0\} = \mathbb{N}^1$

：正の奇数 $2a+1$ を初項とする公比 2 すべての集合は全ての

0を含まない自然数の集合 $\mathbb{N}^1$ に等しい。

と

$\mathbb{N}^1$はその中に重複項を持たないから

$\exists\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset \mathbb{N}^1, 2a_n+1 \neq 2a_m+1 \Rightarrow$

$\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap \forall\{(2a_m+1) \times 2^{h''}\} = \emptyset$ (空集合)

：ある$\mathbb{N}^1$の真部分集合で正奇数 $2a_n+1$ を初項とし、

公比 2 の等比数列全ての集合 $\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

があってこれ以外の如何なる$\mathbb{N}^1$の真部分集合

$\{(2a_m+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$とも互いに素で両者は共有項を

持たない。

（$\mathbb{N}^1$の真部分集合であるすべての正の奇数を初項

とする公比 2の等比数列すべての集合はその中の

どの二つの集合をとっても互いに素で両者は

共通項をもたない。）

〖命題 1_8_1〗

$D(2a_p+1) \neq \Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$ がその中に

重複項を持たないとき$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の$D(2a_p+1)$
$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の$D(2a_{p+1}+1)$は共にその中に重複項を持たない。

〖証明 1_8_1〗
$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立しているとき
命題 1_2
f： $\{2a+1|a \in \mathbb{N}^0\} \to \{6a+4|a \in \mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a \in \mathbb{N}^0\} \to \{2a+1|a \in \mathbb{N}^0\}$
は全単射である。
により
$\exists!\, 2a_{-n}+1 \in \{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$
$\exists!\, f(2a_{-n}+1) = 6a_{-n}+4 = (2a_{-n+1}+1) \times 2^{h_{-n+1x}}$
$\in \{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subseteq D(2a_p+1)$
$(2a_{-n+1}+1 = 2a_p+1$ の場合を含む)
：$2a_{-n}+1$ は S の真部分集合 $\{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$
に含まれて唯一存在し
$f(2a_{-n}+1) = 6a_{-n}+4 = (2a_{-n+1}+1) \times 2^{h_{-n+1x}}$ は $D(2a_{p+1}+1)$
の部分集合 $\{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて唯一存在する。
定義ににより $S = \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,
$\therefore\ S \supset \{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)
：Sの真部分集合 $\{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$と$D(2a_p+1)$は
互いに素で両者は共通項をもたない。
よって $O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$を実行して
$D(2a_p+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$,
$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$ として$D(2a_p+1)$はその中に重複項を持たない。

$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\exists!\, 2a_p+1 \in D(2a_p+1)$
$\exists!\, f(2a_p+1) = 6a_p+4 = (2a_{p+1}+1) \times 2^{h_{(p+1)x}}$
$\in \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$
：$2a_p+1$ は $\mathrm{D}(2a_p+1)$に含まれて唯一存在し
$f(2a_p+1) = 6a_p+4 = (2a_{p+1}+1) \times 2^{h_{(p+1)x}}$ はの真部分集合
$\{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて唯一存在し
定義により $S = \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,
$\therefore\ S \supset \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)
：Sの真部分集合 $\{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$と$D(2a_p+1)$は
互いに素で両者は共通項をもたない。

よって $O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$を実行して
$D(2a_{p+1}+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$
$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,$D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)として$D(2a_{p+1}+1)$
$D(2a_{p+1}+1)$ はその中に重複項を持たない。
……

〖命題 1_8_2〗
$D(2a_p+1) \neq \Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$がその中に
重複項を持たないとき$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件

が成立していてこれを実行した後の $D(2a_p+1)$
$O\cdot C\cdot H\cdot(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立していて
これを実行した後の$D(2a_{p+1}+1)$は共にその中に重複項を
持たない。

〖証明 1_8_2〗
$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\{(2a_{n-1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S,\ S\cap D(2a_p+1)=\Phi$（空集合）
よって$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{n-1}+1)$を実行して
$D(2a_p+1):=D(2a_p+1)\cup\{(2a_{n-1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$S:=\mathbb{N}^1-D(2a_p+1)$
としても$D(2a_p+1)$はその中に重複項をもたない。
$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\{(2a_{p+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S,\ S\cap D(2a_p+1)=\Phi$（空集合）
よって$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$を実行して
$D(2a_{p+1}+1):=D(2a_p+1)\cup\{(2a_{p+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$S:=\mathbb{N}^1-D(2a_p+1)$
としても$D(2a_{p+1}+1)$はその中に重複項を持たない。

〖命題 1_9〗
すべての自然数は コラッツ予想の題意に従った演算を
有限回繰り返して行えば 1となる。
〖証明 1_9〗
$2a_0+1\neq 1,\ O.C.S(2a_1+1), O.C.I.(2a_1+1, 2a_0+1)$
$O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-1}+1)$等により
$D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''}|\ 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''}|\ 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
を得れば
命題 1_5
$f(2a_x+1)\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\Rightarrow$
$2a_x+1=1,\ h''=2$
(ただしa_xは$\mathbb{N}^0$を定義域とする任意定数)
：$f(2a_x+1)$が$\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$に含まれている
とすれば $2a_x+1=1, h''=2$ である。
命題 1_6
$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$
$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,\ 2a_{-1}+1\neq 1\Rightarrow$
$2a_{-1}+1\neq 2a_1+1$
：$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1,\ f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,$
となるとき $2a_{-1}+1$ が 1でなければ
$2a_{-1}+1$と $2a_1+1$は等しくない。
によって、
$D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''}|\ 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''}|\ 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
はその中に重複項を持たない。
この状態 $(D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$

$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''} \mid 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$

$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''} \mid 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}, n=0)$ のまま、または

命題 1_8

$D(2a_p+1)\neq\Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$ がその中に重複項を持たないとき $O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$ の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の $D(2a_p+1)$ $O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$ の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の $D(2a_{p+1}+1)$ は共にその中に重複項を持たない。と

命題 1_8_2

$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$ が一度実行されれば

$O.C.I.(\dots, 2a_{-n}+1), O.C.H.(2a_{-n}+1, \dots), O.C.I.(\dots, 2a_p+1),$

$O.C.H.(2a_p+1, \dots)$ は 2 度と実行されることがなく

$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$ が一度実行されれば

$O.C.I.(\dots, 2a_{p+1}+1), O.C.H.(2a_{p+1}+1, \dots), O.C.I.(\dots, 2a_p+1),$

$O.C.H.(2a_p+1, \dots)$ は 2 度と実行されることがない。

によってこの後何度か $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-2}+1)$, $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-3}+1), \dots$ $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n}+1)$,と実行してその中に重複項を持たない $D(2a_1+1)$ を得たとする。このとき $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ と $O.C.H.(2a_2+1, 2a_1+1)$ が実行可能で、ここで $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ を実行したとすれば

$\{(2a_{-n-1}+1)\times 2^{h''} \mid 2a_{n-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset D(2a_1+1)$

$\{(2a_2+1)\times 2^{h''} \mid 2a_2+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S$

$D(2a_1+1)\cap S=\Phi$（空集合）

$\therefore 2a_{-n-1}+1\neq 2a_2+1$

$O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ ではなく $O.C.H.(2a_2+1, 2a_1+1)$ を先に実行したとすれば

$\{(2a_2+1)\times 2^{h''} \mid 2a_2+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset D(2a_2+1)$

$\{(2a_{-n-1})\times 2^{h''} \mid 2a_{-n-1}\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S$

$D(2a_2+1)\cap S=\Phi$（空集合）

$\therefore 2a_{-n-1}+1\neq 2a_2+1$

以上により、以降 $O.C.I.(\dots,\dots)$, $O.C.H.(\dots,\dots)$ は実行順序に拘わらず何度でも継続実行が可能で何度これを実行しても $D(\dots)$ はその中に重複項をもつことはない。

したがってすべての 1 以外の自然数はコラッツ予想の題意に従った演算を有限回繰り返すことによって初項と同じ数となって循環することがなく、0 と 1 以外の自然数はコラッツ予想の題意に従った演算上 $1\to 4\to 1$ 以外に閉じた部分がない。

よって

$D(1):=\{1\times 2^{h''} \mid h''\in\mathbb{N}^0\}$

$S:=\mathbb{N}^1-D(1)$ ： $O.C.I.(\dots,\dots)$ 実行直後の $D(1)$ と S

として、以降

命題 1—5 補足

$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_x+1)\times 2^{h_{xy}}\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''} \mid h''\in\mathbb{N}^0\}$

のように初項 $\times 3+1$ を自分自身の中に持つような正奇数を初項とする公比 2 等比数列の集合は

初項を1とする$\{1\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$以外には存在しない。
によって順序対$(2a+1,6a+4)$ $(2a+1,6a+4)$の片方がD (…)に含まれ
他方がSに含まれるという状態があり得ない唯一の例外
として$O.C.I.(1,1)$を除いて$O.C.I.(1,2a_{-n}+1)$を実行継続していけば
有限値をもった自然数ならば必ず$D(1)$に含まれるようになり、
$D(2a_p+1)$中中のすべての自然数は

命題 1_4

$$f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$$
$$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$$

あるいは

$$f(2a_{-m}+1)=6a_{-m}+4=(2a_{-m+1}+1)\times 2^{h_{(-m+1)x}},$$
$$\{(2a_{-m+1}+1)\times 2^{h_{(-m+1)x}}\}\div 2^{h_{(-m+1)x}}=\ 2a_{-m+1}+1$$
$$f(2a_{-m+1}+1)=6a_{-m+1}+4=(2a_{-m+2}+1)\times 2^{h_{(-m+2)x}},$$
$$\{(2a_{-m+2}+1)2^{h_{(-m+2)x}}\}\div 2^{h_{(-m+2)x}}=\ 2a_{-m+2}+1$$
$$\vdots$$
$$f(2a_{-1}+1)=6a_{-1}+4=(2a_0+1)\times 2^{h_{0x}},$$
$$\{(2a_0+1)\times 2^{h_{0x}}\}\div 2^{h_{0x}}=\ 2a_0+1$$
$$f(2a_0+1)=6a_0+4=(2a_{+1}+1)\times 2^{h_{1x}}$$
$$\{(2a_{+1}+1)\times 2^{h_{1x}}\}\div 2^{h_{1x}}=\ 2a_{+1}+1$$
$$\vdots$$
$$f(2a_{p-1}+1)=6a_{p-1}+4=(2a_p+1)\times 2^{h_{px}},$$
$$\{(2a_p+1)\times 2^{h_{px}}\}\div 2^{h_{px}}=\ 2a_p+1$$

のようにコラッツ予想の題意に従った演算を有限回繰り返して
行えば$2a_p+1$となる。
よってすべての自然数は$D(1)$においてコラッツ予想の題意に
従った演算を有限回繰り返して行えば1となる。

参考資料：http://www5b.biglobe.ne.jp/~simomac/uindou.htm
http://toretate.fc2web.com/toryo/030517/030517.html
http://simomath.blog.fc2.com/blog-entry-157.html
http://simomath.blog.fc2.com/blog-entry-157.html
http://syarekke.blog70.fc2.com/blog-category-38.html

簡易版 pdf https://dongram.web.fc2.com/collatz20221esy.pdf
Copyright © 2023/02~ All Rights Reserved
簡易版 web https://dongram.web.fc2.com/collatz20221esy.htm
Copyright © 2023/02~ All Rights Reserved

著作者 著作権者：成清慎 makoto.narikiyo@gmail.com

上記URLを出典として明示せずに本ドキュメントの内容の
全部または一部を全てのメディアに記載しないでください。

参考図：次ページ

付録：参考図１　61　奇数，　148　$6a$ +4 型偶数，

317 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 1552　$f(x) = 3x + 1$，$f : \{2a + 1 | a \in \mathbb{N}^0\} \to \{6a + 4 | a \in \mathbb{N}^0\}$ 写像

(全単射)

$\mathbb{N}^1$　　$O.C.S.(7)$

S　149　298　596　1192　2384　4768　9536 …… $149\times 2^{h''}$

37　74　148　296　592　1184　2368 …… $37\times 2^{h''}$　　$e.t.c$

$\times 3+1$

$D(7)$

7　14　28　56　112　224　448　896　1792 …… $7\times 2^{h''}$

$O.C.I.(7,37)$

$\mathbb{N}^1$

S　149　298　596　1192　2384　4768　9536 …… $149\times 2^{h''}$　　$e.t.c.$

$D(7)$

37　74　148　296　592　1184　2368 …… $37\times 2^{h''}$

7　14　28　56　112　224　448　896　1792 …… $7\times 2^{h''}$

11　22　44　88　176　352　704　148　296　592 …… $11\times 2^{h''}$　　$e.t.c$

$O.C.H.(11,7)$

$\mathbb{N}^1$

S　149　298　596　1192　2384　4768　9536 …… $149\times 2^{h''}$　　$e.t.c$

$D(11)$

37　74　148　296　592　1184　2368 …… $37\times 2^{h''}$

7　14　28　56　112　224　448　896　1792 …… $7\times 2^{h''}$

11　22　44　88　176　352　704　148　296　592 …… $11\times 2^{h''}$

$D(7) = \emptyset$ (空集合)

参考図２

$O.C.S.(27)$から開始して$O.C.H.(41,27)$以降$O.C.H.(\ldots,\ldots)$の継続実行で

$D(1)$を得て１に至る様子を図示

奇数 2a+1　175　$\times 3+1$　全単射写像

526　6a+4　型偶数

$\longrightarrow 41\times 2^{h''}$　奇数を初項とする公比 2の等比数列

27	54	108	216	432	864	$27\times 2^{h''}$
41	82	164	328	656	1312	$41\times 2^{h''}$
31	62	124	248	496	992	$31\times 2^{h''}$
47	94	188	376	752	1504	$47\times 2^{h''}$
71	142	284	568	1136	2272	$71\times 2^{h''}$
107	214	428	856	1712	3424	$107\times 2^{h''}$
161	322	644	1288	2576	5152	$161\times 2^{h''}$
121	242	484	968	1936	3872	$121\times 2^{h''}$
91	182	364	728	1456	2912	$91\times 2^{h''}$
137	274	548	1096	2192	4384	$137\times 2^{h''}$
103	206	412	824	1648	3296	$103\times 2^{h''}$
155	310	620	1240	2480	4960	$155\times 2^{h''}$
233	466	932	1864	3728	7456	$233\times 2^{h''}$
175	350	700	1400	2800	5600	$175\times 2^{h''}$
263	526	1052	2104	4208	8416	$263\times 2^{h''}$
395	790	1580	3160	6320	12640	$395\times 2^{h''}$
593	1186	2372	4744	9488	18976	$593\times 2^{h''}$
445	890	1780	3560	7120	14240	$445\times 2^{h''}$
167	334	668	1336	2672	5344	$167\times 2^{h''}$
251	502	1004	2008	4016	8032	$251\times 2^{h''}$
377	754	1508	3016	6032	12064	$377\times 2^{h''}$
283	566	1132	2264	4528	9056	$283\times 2^{h''}$
425	850	1700	3400	6800	13600	$425\times 2^{h''}$
319	638	1276	2552	5104	10208	$319\times 2^{h''}$
479	958	1916	3832	7664	15328	$479\times 2^{h''}$
719	1438	2876	5752	11504	23008	$719\times 2^{h''}$
1079	2158	4316	8632	17264	34528	$1079\times 2^{h''}$
1619	3238	6476	12952	25904	51808	$1619\times 2^{h''}$
2429	4858	9716	19432	38864	77728	$2429\times 2^{h''}$
911	1822	3644	7288	14576	29152	$911\times 2^{h''}$
1367	2734	5468	10936	21872	43744	$1367\times 2^{h''}$
2051	4102	8204	16408	32816	65632	$2051\times 2^{h''}$
3077	6154	12308	24616	49232	98464	$3077\times 2^{h''}$
577	1154	2308	4616	9232	18464	$577\times 2^{h''}$
433	866	1732	3464	6928	13856	$433\times 2^{h''}$
325	650	1300	2600	5200	10400	$251\times 2^{h''}$
61	122	244	488	976	1952	$61\times 2^{h''}$
23	46	92	184	368	736	$23\times 2^{h''}$
35	70	140	280	560	1120	35× ▣
53	106	212	424	848	1696	$53\times 2^{h''}$
5	10	20	40	80	160	$5\times 2^{h''}$
1	2	4	8	16	32	$1\times 2^{h''}$