コラッツ予想について　$ver.1.35$ 2023/07/24　成清　慎

【概　要】

本ドキュメントは

$f(x) := 3 \times x + 1$, $(2a+1) \times 3 + 1 = 6a + 4$, $f(2a+1) = 6a + 4$,

$\therefore$ $f: \{2a+1 | a \in \mathbb{N}^0\} \to \{6a+4 | a \in \mathbb{N}^0\}$,

$f^{-1}: \{6a+4 | a \in \mathbb{N}^0\} \to \{2a+1 | a \in \mathbb{N}^0\}$

は全単射である …(1)

と

$\{(2a+1) \times 2^{h''} | a, h'' \in \mathbb{N}^0\} = \mathbb{N}^1$ (0を含まない全自然数の集合に等しい。何故ならばすべての0を含まない全自然数は2で割り切れる限り2で割り続ければ必ず割り切れなくなって奇数となるから。) …(2)

により

$D(2a_x+1) \coloneqq \{(2a_x+1) \times 2^{h''} | 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$,

($2a_x+1$ は1以外の正奇数で任意定数)

$S := \mathbb{N}^1 - D(2a_x+1)$

：$\left\{(2a_x+1) \times 2^{h''} \middle| 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\right\}$ を $D(2a_x+1)$ として

S を $D(2a_x+1)$ 以外の0を含まない全自然数の集合として定義する。

$S \supset \{(2a_{p-1}+1) \times 2^{h''} | \, h'' \in \mathbb{N}^0\} \not\ni f(2a_{p-1}+1) = (6a_{p-1}+4) \in D(2a_p+1)$

ならば ($2a_p + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む)

$D(2a_p+1) \coloneqq D(2a_x+1) \cup \{(2a_{p-1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$S := \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$ とそれぞれ再定義する。…(a)

または

$D(2a_p+1) \not\ni f(2a_p+1) = (6a_p+4) \in \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$

ならば ($2a_p + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む)

$D(2a_{p+1}+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_{p+1}+1)$, $D(2a_p+1) = \emptyset$(空集合) として

それぞれ再定義する。…(b)

…(a), …(b) の操作はともに一度実行されれば実行可能な条件を満たさなくなるから二度と実行されない。

したがって

$\mathbb{N}^1 = D(2a_n+1) \cup S$ がその中に重複項を持たないとすれば

上記の操作を繰り返すことによって後述の例外に該当しない限り $\mathbb{N}^1$ 中唯一 $\emptyset$ (空集合) ではない $D(2a_n+1)$ はその中に重複項を持たず、$D(2a_n+1)$ に含まれるすべての元は奇数なら3倍して1を足し偶数なら2で割るというコラッツ予想の題意のとおりの演算を有限回繰り返しても元の数と同じ数となって循環することはなく、$2a_n+1$ となる。

以上のこと等によってすべての有限値をもった自然数はコラッツ予想の題意のとおりの演算を有限回繰り返せば1となるというコラッツ予想の題意の真偽を検証しようと試みるものです。

【定義 1】

$\mathbb{N}^1$:全ての 0 を含まない自然数全体の集合（ただしその中に重複項をもたず、多重集合としてみた場合すべての元の重複度は 1 であるとする。）

$\mathbb{N}^0$:全ての 0 を含んだ自然数全体の集合（〃）

$\mathbb{Z}$:全ての 0 を含む整数全体の集合

a_n, x_m, y_0, h_{mn} …:右下の小文字によって修飾されている変数名は特に変域の指定がなければ$\mathbb{N}^0$にふくまれて唯一存在する任意定数または他の任意定数に直接または間接的に依存して定まる固定値をもった定数を表す。固定値をとるものして扱われるため集合表記の中の定義域の別途指定はこれを省略する場合がある。

例：$\{2a_x + y \mid y \in \{0,1,2\}\} = \{2a_x + 0\,, 2a_x + 1\,, 2a_x + 2\}$

$\{2a_x + y \mid y \in \mathbb{N}^0\} = \{2a_x + 0\,, 2a_x + 1\,, 2a_x + 2\,, 2a_x + 3\,, 2a_x + 4\ \ldots\}$

a, x, y, h …. ：右下の小文字による修飾を伴わない変数名は特に変域指定が無ければ $\mathbb{N}^0$(全ての 0 を含む自然数全体の集合）をわたる値をとりうる普通の変数を表す。この場合変域指定の $\in \mathbb{N}^0$は省略されることがある。

$f(x) := 3x + 1$

$e(2a_0 + 1, n) \ := \ (2a_0 + 1 + \frac{1}{3}) \times 4^n - \frac{1}{3}$

初項 $2a_0 + 1$, 漸化式 $2a_{n+1} + 1 = (2a_n + 1) \times 4 + 1$ の漸化数列の第 n 項 $a_n + 1$ (初項 $2a_0 + 1$ は第 0 項）

$Oparation\ Collatz\ Setup(2a_x + 1),\ O.C.S(2a_x + 1)$

$: D(2a_x + 1) := \{(2a_x + 1) \times 2^{h''} \mid 2a_x + 1 \neq 1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$\mathrm{S} := \mathbb{N}^1 - D(2a_x + 1)$ （$2a_x + 1$ は 1 以外の正奇数で任意定数。）

：$\{(2a_x + 1) \times 2^{h''} \mid 2a_x + 1 \neq 1,\ h'' \in \mathbb{N}^0\}$を $D(2a_x + 1)$として、$D(2a_x + 1)$以外の$\mathbb{N}^1$ (全ての 0 を含まない自然数全体の集合）を S としてそれぞれ定義する。

以上の操作を$Operation\ Collatz\ Setup(2a_x + 1)$略して $O.C.S.(2a_x + 1)$と呼ぶこととする。

$Operation\ Collatz\ Invite(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1),\ O.C.I.(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$

$: D(2a_x + 1) \supset \{(2a_n + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \ni (2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}} = 6a_{n-1} + 4$

$D(2a_x + 1) \not\ni f^{-1}((2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}) = 2a_{n-1} + 1$

$\in \{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S \ \subset \ \mathbb{N}^1 \Rightarrow$

：$(2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}$が $D(2a_x + 1)$の真部分集合である$\{(2a_n + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれ、$f^{-1}((2a_n + 1) \times 2^{h_{ny}}) = 2a_{n-1} + 1$ が $\mathbb{N}^1$の真部分集合である Sの真部分集合 $(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて存在すれば ($2a_n + 1 = 2a_x + 1$ の場合を含む）

$D(2a_x + 1) := D(2a_x + 1) \cup \{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$\mathrm{S} := \mathbb{N}^1 - D(2a_x + 1)$

：$D(2a_x + 1)$を $D(2a_x + 1)$と $\{(2a_{n-1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\}$の和集合として、S を $D(2a_x + 1)$以外の $\mathbb{N}^1$としてそれぞれ定義する。

以上の操作を$Operation\ Collatz\ Invite(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$略して $O.C.I.(2a_x + 1, 2a_{n-1} + 1)$と呼ぶこととする。

$Operation\ Collatz\ Hijack(2a_{x+1} + 1, 2a_x + 1),\ O.C.H.(2a_{x+1} + 1, 2a_x + 1)$

$: D(2a_x + 1) \ni 2a_x + 1$

$D(2a_x + 1) \not\ni f(2a_x + 1) = (2a_{x+1} + 1) \times 2^{h_{(x+1)y}} = 6a_x + 4$

$\in \{(2a_{x+1} + 1) \times 2^{h''} \mid h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S \ \subset \ \mathbb{N}^1 \Rightarrow$

：$2a_x + 1$ が $D(2a_x + 1)$に含まれ、

$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_{x+1}+1)\times 2^{h_{(x+1)y}}$
が $\mathbb{N}^1$の真部分集合である Sの真部分集合
$\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$に含まれて存在すれば
$D(2a_{x+1}+1)\coloneqq D(2a_x+1)\cup\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\mathrm{S}\coloneqq\mathbb{N}^1-D(2a_{x+1}+1)$,　$D(2a_x+1)\coloneqq\emptyset$(空集合)
：$D(2a_{x+1}+1)$を $D(2a_x+1)$ と $\{(2a_{x+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
の和集合として
Sを $D(2a_{x+1}+1)$以外の $\mathbb{N}^1$としてまた $D(2a_x+1)$を
$\emptyset$(空集合)としてそれぞれ定義する。
以上の操作を $Operation\ Collatz\ Hijack(2a_{x+1}+1,2a_x+1)$略して
$O.C.H.(2a_{x+1}+1,2a_x+1)$と呼ぶこととする。

〖命題 1_1〗
$\{(2a+1)\times 2^{h''}|a,h''\in\mathbb{N}^0\}=\mathbb{N}^1$

：正の奇数 $2a+1$を初項とする公比 2の等比数列すべて
の集合は全ての 0を含まない自然数の集合 $\mathbb{N}^1$に等しい。
〖証明 1_1〗
全ての 0を含まない偶数は 2で割り切れる限り 2で割り続けて
いけば必ず割り切れなくなって奇数となるから。

〖命題 1_2〗
f： $\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}$
は全単射である。
〖証明 1_2〗
$f(2a+1)=(2a+1)\times 3+1=6a+4$
$f^{-1}(6a+4)=(6a+4-1)\div 3\ =2a+1$
$\therefore$　f： $\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}$
は全単射である。

〖命題 1_3〗
$(6a+1)\times 2^{2h+2}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
$(6a+3)\times 2^{h}\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^1)$
$(6a+5)\times 2^{2h+1}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
〖証明 1_3〗
$6a+2\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+2)\times 2^1=12a+4=6(2a)+4\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+4)\times 2^1=12a+8=6(2a+1)+2\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+1)\times 2^1=12a+2=6(2a)+2\ \notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+5)\times 2^1=12a+10=6(2a+1)+4\ \in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$(6a+3)\times 2^1=12a+6=6(2a+1)+3\ \notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$
$\therefore$
$(6a+1)\times 2^{2h+2}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$
$(6a+3)\times 2^{h}\notin\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^1)$
$(6a+5)\times 2^{h+1}\in\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}\ (h\in\mathbb{N}^0)$

〖命題 1_4〗
$f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$
$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$

〖 証 明 1_4 〗

$(4a+3)\times 3+1=12a+10$

$(12a+10)\div 2^1=6a+5$

$(8a+1)\times 3+1=24a+4$

$(24a+4)\div 2^2=6a+1$

$(2a+1)\times 3+1=6a+4$

$(2a+1)\times 4+1=e(2a+1,1)$
$=8a+5$
$(8a+5)\times 3+1=24a+16$
$=(6a+4)\times 2^2$
$\therefore\quad f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$
$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$

〖 命 題 1_5 〗

$f(2a_x+1)\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\Rightarrow$
$2a_x+1=1,\ h''=2$ (ただし $2a_x+1$ は $\mathbb{N}^0$ を定義域とする任意定数)
：$f(2a_x+1)$ が $\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$ に含まれているとすれば
$2a_x+1=1, h''=2$ である。

〖 証 明 1_5 〗

$f(2a+1)=6a+4$
$6a+4\div 2^{h''}=2a+1$
$\frac{(2a+1)\times 3+1}{2^{h''}}=2a+1$
$(2a+1)\times\left(2^{h''}-3\right)=1$
$\therefore a=0,\ 2a+1=1,\ h''=2$

〖 命 題 1_5 補 足 〗

以上により
$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_x+1)\times 2^{h_{xy}}\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
のように初項 $\times 3+1$ を自分自身の中に持つような正奇数を初項とする公比 2 の等比数列の集合は初項を 1 とする $\{1\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$ 以外には存在しない。

〖 命 題 1_6 〗

$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$
$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,\ 2a_{-1}+1\neq 1\Rightarrow$
$2a_{-1}+1\neq 2a_1+1$
：$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$ ，$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,$
となるとき $2a_{-1}+1$ が 1 でなければ $2a_{-1}+1$ と $2a_1+1$ は等しくない。

〖 証 明 1_6 〗

$2a_{-1}+1=2a_1+1$ と置けば
$\frac{(2a_{-1}+1)\times 3+1}{2^{h_0}}=2a_0+1$
$\frac{(2a_{-1}+1)\times 3^2+3+2^{h_0}}{2^{h_0+h_1}}=2a_{-1}+1$
$3+2^{h_0}=(2a_{-1}+1)\cdot(2^{h_0+h_1}-3^2)$
$\frac{3+2^{h_0}}{2^{h_0+h_1-3^2}}=2a_{-1}+1$
$\therefore 2a_{-1}+1=1\,,h_0=2,h_1=2$

$\therefore f(2a_{-1}+1) \div 2^{h_0} = 2a_0 + 1$

$f(2a_0+1) \div 2^{h_1} = 2a_1 + 1,\ 2a_{-1}+1 \neq 1 \Rightarrow$

$2a_{-1}+1 \neq 2a_1 + 1$

：$f(2a_{-1}+1) \div 2^{h_0} = 2a_0 + 1$

$f(2a_0+1) \div 2^{h_1} = 2a_1 + 1,$

となるとき $2a_{-1}+1$ が 1 でなければ

$2a_{-1}+1$ と $2a_1+1$ は等しくない。

〖命題 1_6 補足〗

以上により

$f(2a_0+1) = 6a_0 + 4 = (2a_1+1) \times 2^{h_{1x}}$

$\in \{(2a_1+1) \times 2^{h''} | a_1 \in \mathbb{N}^1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

$f(2a_1+1) = 6a_1 + 4 = (2a_0+1) \times 2^{h_{0y}}$

$\in \{(2a_0+1) \times 2^{h''} | a_0 \in \mathbb{N}^1, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

のように初項 $\times 3+1$ を相互に持ち合うような相異なる正奇数を初項とする公比 2 の等比数列の集合の対は存在しない。

〖命題 1_7〗

$\exists\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset \mathbb{N}^1, 2a_n+1 \neq 2a_m+1 \Rightarrow$

$\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap \forall\{(2a_m+1) \times 2^{h''}\} = \emptyset$（空集合）

：ある$\mathbb{N}^1$の真部分集合で正奇数 $2a_n+1$ を初項とし、

公比 2 の等比数列全ての集合 $\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | n, h'' \in \mathbb{N}^0\}$

があって、$2a_n+1 \neq 2a_m+1$ ならば如何なる正奇数 $2a_m+1$

を初項とし、公比 2の等比数列全ての集合

$\{(2a_m+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$ とも互いに素で両者は共有項を

持たない。

（$\mathbb{N}^1$の真部分集合であるすべての正の奇数を初項とする

公比 2の等比数列すべての集合はその中のどの二つの集合

をとっても互いに素で両者は共通項をもたない。）

〖証明 1_7〗

命題 1—1

$\{(2a+1) \times 2^{h''} | a, h'' \in \mathbb{N}^0\} = \mathbb{N}^1$

：正の奇数 $2a+1$ を初項とする公比 2 すべての集合は全ての

0を含まない自然数の集合 $\mathbb{N}^1$ に等しい。

と

$\mathbb{N}^1$はその中に重複項を持たないから

$\exists\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset \mathbb{N}^1, 2a_n+1 \neq 2a_m+1 \Rightarrow$

$\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap \forall\{(2a_m+1) \times 2^{h''}\} = \emptyset$ (空集合)

：ある$\mathbb{N}^1$の真部分集合で正奇数 $2a_n+1$ を初項とし、

公比 2 の等比数列全ての集合 $\{(2a_n+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$

があってこれ以外の如何なる$\mathbb{N}^1$の真部分集合

$\{(2a_m+1) \times 2^{h''} | h'' \in \mathbb{N}^0\}$とも互いに素で両者は共有項を

持たない。

（$\mathbb{N}^1$の真部分集合であるすべての正の奇数を初項

とする公比 2の等比数列すべての集合はその中の

どの二つの集合をとっても互いに素で両者は

共通項をもたない。）

〖命題 1_8_1〗

$D(2a_p+1) \neq \Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$ がその中に

重複項を持たないとき$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の$D(2a_p+1)$
$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の$D(2a_{p+1}+1)$は共にその中に重複項を持たない。

〖証明 1_8_1〗
$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立しているとき
命題 1_2
f： $\{2a+1|a \in \mathbb{N}^0\} \to \{6a+4|a \in \mathbb{N}^0\}$
f^{-1}： $\{6a+4|a \in \mathbb{N}^0\} \to \{2a+1|a \in \mathbb{N}^0\}$
は全単射である。
により
$\exists!\, 2a_{-n}+1 \in \{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$
$\exists!\, f(2a_{-n}+1) = 6a_{-n}+4 = (2a_{-n+1}+1) \times 2^{h_{-n+1x}}$
$\in \{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subseteq D(2a_p+1)$
$(2a_{-n+1}+1 = 2a_p+1$ の場合を含む)
：$2a_{-n}+1$ は S の真部分集合 $\{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$
に含まれて唯一存在し
$f(2a_{-n}+1) = 6a_{-n}+4 = (2a_{-n+1}+1) \times 2^{h_{-n+1x}}$ は $D(2a_{p+1}+1)$
の部分集合 $\{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて唯一存在する。
定義ににより $S = \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,
$\therefore\ S \supset \{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)
：Sの真部分集合 $\{(2a_{-n}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$と$D(2a_p+1)$は
互いに素で両者は共通項をもたない。
よって $O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$を実行して
$D(2a_p+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{-n+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$,
$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$ として$D(2a_p+1)$はその中に重複項を持たない。

$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\exists!\, 2a_p+1 \in D(2a_p+1)$
$\exists!\, f(2a_p+1) = 6a_p+4 = (2a_{p+1}+1) \times 2^{h_{(p+1)x}}$
$\in \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \subset S$
：$2a_p+1$ は $\mathrm{D}(2a_p+1)$に含まれて唯一存在し
$f(2a_p+1) = 6a_p+4 = (2a_{p+1}+1) \times 2^{h_{(p+1)x}}$ はの真部分集合
$\{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$に含まれて唯一存在し
定義により $S = \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,
$\therefore\ S \supset \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\} \cap D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)
：Sの真部分集合 $\{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$と$D(2a_p+1)$は
互いに素で両者は共通項をもたない。

よって $O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$を実行して
$D(2a_{p+1}+1) \coloneqq D(2a_p+1) \cup \{(2a_{p+1}+1) \times 2^{h''}|h'' \in \mathbb{N}^0\}$
$S \coloneqq \mathbb{N}^1 - D(2a_p+1)$,$D(2a_p+1) = \emptyset$ (空集合)として$D(2a_{p+1}+1)$
$D(2a_{p+1}+1)$ はその中に重複項を持たない。
……

〖命題 1_8_2〗
$D(2a_p+1) \neq \Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$がその中に
重複項を持たないとき$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件

が成立していてこれを実行した後の $D(2a_p+1)$
$O\cdot C\cdot H\cdot(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立していて
これを実行した後の$D(2a_{p+1}+1)$は共にその中に重複項を
持たない。

〖証明 1_8_2〗
$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\{(2a_{n-1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S,\ S\cap D(2a_p+1)=\Phi$（空集合）
よって$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{n-1}+1)$を実行して
$D(2a_p+1):=D(2a_p+1)\cup\{(2a_{n-1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$S:=\mathbb{N}^1-D(2a_p+1)$
としても$D(2a_p+1)$はその中に重複項をもたない。
$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$の実行可能条件が成立しているとき
$\{(2a_{p+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S,\ S\cap D(2a_p+1)=\Phi$（空集合）
よって$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$を実行して
$D(2a_{p+1}+1):=D(2a_p+1)\cup\{(2a_{p+1}+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$
$S:=\mathbb{N}^1-D(2a_p+1)$
としても$D(2a_{p+1}+1)$はその中に重複項を持たない。

〖命題 1_9〗
すべての自然数は コラッツ予想の題意に従った演算を
有限回繰り返して行えば 1となる。
〖証明 1_9〗
$2a_0+1\neq 1,\ O.C.S(2a_1+1), O.C.I.(2a_1+1, 2a_0+1)$
$O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-1}+1)$等により
$D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''}|\ 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''}|\ 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
を得れば
命題 1_5
$f(2a_x+1)\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}\Rightarrow$
$2a_x+1=1,\ h''=2$
(ただしa_xは$\mathbb{N}^0$を定義域とする任意定数)
：$f(2a_x+1)$が$\{(2a_x+1)\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$に含まれている
とすれば $2a_x+1=1, h''=2$ である。
命題 1_6
$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1$
$f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,\ 2a_{-1}+1\neq 1\Rightarrow$
$2a_{-1}+1\neq 2a_1+1$
：$f(2a_{-1}+1)\div 2^{h_0}=2a_0+1,\ f(2a_0+1)\div 2^{h_1}=2a_1+1,$
となるとき $2a_{-1}+1$ が 1でなければ
$2a_{-1}+1$と $2a_1+1$は等しくない。
によって、
$D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''}|\ 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''}|\ 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$
はその中に重複項を持たない。
この状態 $(D(2a_1+1)=\{\{(2a_{-1}+1)\times 2^{h''}|\ 2a_{-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$

$\cup\{(2a_0+1)\times 2^{h''} \mid 2a_0+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}$

$\cup\{(2a_1+1)\times 2^{h''} \mid 2a_1+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}, n=0)$ のまま、または

命題 1_8

$D(2a_p+1)\neq\Phi$（空集合）があって、$D(2a_p+1)$ がその中に重複項を持たないとき $O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$ の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の $D(2a_p+1)$ $O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$ の実行可能条件が成立していてこれを実行した後の $D(2a_{p+1}+1)$ は共にその中に重複項を持たない。と

命題 1_8_2

$O.C.I.(2a_p+1, 2a_{-n}+1)$ が一度実行されれば

$O.C.I.(\dots, 2a_{-n}+1), O.C.H.(2a_{-n}+1, \dots), O.C.I.(\dots, 2a_p+1),$

$O.C.H.(2a_p+1, \dots)$ は 2 度と実行されることがなく

$O.C.H.(2a_{p+1}+1, 2a_p+1)$ が一度実行されれば

$O.C.I.(\dots, 2a_{p+1}+1), O.C.H.(2a_{p+1}+1, \dots), O.C.I.(\dots, 2a_p+1),$

$O.C.H.(2a_p+1, \dots)$ は 2 度と実行されることがない。

によってこの後何度か $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-2}+1)$, $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-3}+1), \dots$ $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n}+1)$,と実行してその中に重複項を持たない $D(2a_1+1)$ を得たとする。このとき $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ と $O.C.H.(2a_2+1, 2a_1+1)$ が実行可能で、ここで $O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ を実行したとすれば

$\{(2a_{-n-1}+1)\times 2^{h''} \mid 2a_{n-1}+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset D(2a_1+1)$

$\{(2a_2+1)\times 2^{h''} \mid 2a_2+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S$

$D(2a_1+1)\cap S=\Phi$（空集合）

$\therefore 2a_{-n-1}+1\neq 2a_2+1$

$O.C.I.(2a_1+1, 2a_{-n-1}+1)$ ではなく $O.C.H.(2a_2+1, 2a_1+1)$ を先に実行したとすれば

$\{(2a_2+1)\times 2^{h''} \mid 2a_2+1\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset D(2a_2+1)$

$\{(2a_{-n-1})\times 2^{h''} \mid 2a_{-n-1}\neq 1, h''\in\mathbb{N}^0\}\subset S$

$D(2a_2+1)\cap S=\Phi$（空集合）

$\therefore 2a_{-n-1}+1\neq 2a_2+1$

以上により、以降 $O.C.I.(\dots,\dots)$, $O.C.H.(\dots,\dots)$ は実行順序に拘わらず何度でも継続実行が可能で何度これを実行しても $D(\dots)$ はその中に重複項をもつことはない。

したがってすべての 1 以外の自然数はコラッツ予想の題意に従った演算を有限回繰り返すことによって初項と同じ数となって循環することがなく、0 と 1 以外の自然数はコラッツ予想の題意に従った演算上 $1\to 4\to 1$ 以外に閉じた部分がない。

よって

$D(1):=\{1\times 2^{h''} \mid h''\in\mathbb{N}^0\}$

$S:=\mathbb{N}^1-D(1)$ ： $O.C.I.(\dots,\dots)$ 実行直後の $D(1)$ と S

として、以降

命題 1—5 補足

$f(2a_x+1)=6a_x+4=(2a_x+1)\times 2^{h_{xy}}\in\{(2a_x+1)\times 2^{h''} \mid h''\in\mathbb{N}^0\}$

のように初項 $\times 3+1$ を自分自身の中に持つような正奇数を初項とする公比 2 等比数列の集合は

初項を1とする$\{1\times 2^{h''}|h''\in\mathbb{N}^0\}$以外には存在しない。
によって順序対$(2a+1,6a+4)$ $(2a+1,6a+4)$の片方が$D(\ldots)$に含まれ
他方がSに含まれるという状態があり得ない唯一の例外
として$O.C.I.(1,1)$を除いて$O.C.I.(1,2a_{-n}+1)$を実行継続していけば
有限値をもった自然数ならば必ず$D(1)$に含まれるようになり、
$D(2a_p+1)$中中のすべての自然数は

命題 1_4

$$f\big(e(4a+3,n)\big)\div 2^{1+2n}=6a+5$$
$$f\big(e(8a+1,n)\big)\div 2^{2+2n}=6a+1$$

あるいは

$$f(2a_{-m}+1)=6a_{-m}+4=(2a_{-m+1}+1)\times 2^{h_{(-m+1)x}},$$
$$\{(2a_{-m+1}+1)\times 2^{h_{(-m+1)x}}\}\div 2^{h_{(-m+1)x}}=\ 2a_{-m+1}+1$$
$$f(2a_{-m+1}+1)=6a_{-m+1}+4=(2a_{-m+2}+1)\times 2^{h_{(-m+2)x}},$$
$$\{(2a_{-m+2}+1)2^{h_{(-m+2)x}}\}\div 2^{h_{(-m+2)x}}=\ 2a_{-m+2}+1$$
$$\vdots$$
$$f(2a_{-1}+1)=6a_{-1}+4=(2a_0+1)\times 2^{h_{0x}},$$
$$\{(2a_0+1)\times 2^{h_{0x}}\}\div 2^{h_{0x}}=\ 2a_0+1$$
$$f(2a_0+1)=6a_0+4=(2a_{+1}+1)\times 2^{h_{1x}}$$
$$\{(2a_{+1}+1)\times 2^{h_{1x}}\}\div 2^{h_{1x}}=\ 2a_{+1}+1$$
$$\vdots$$
$$f(2a_{p-1}+1)=6a_{p-1}+4=(2a_p+1)\times 2^{h_{px}},$$
$$\{(2a_p+1)\times 2^{h_{px}}\}\div 2^{h_{px}}=\ 2a_p+1$$

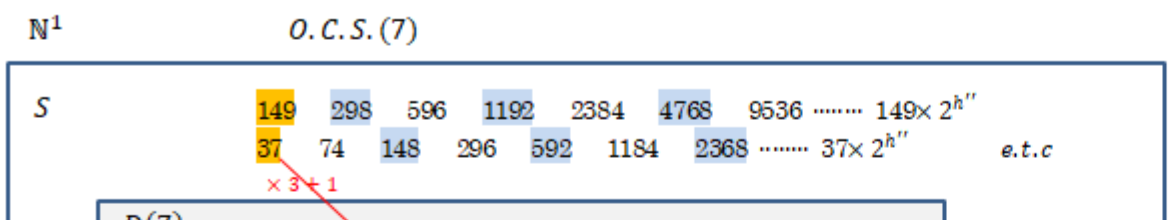
のようにコラッツ予想の題意に従った演算を有限回繰り返して
行えば$2a_p+1$となる。
よってすべての自然数は$D(1)$においてコラッツ予想の題意に
従った演算を有限回繰り返して行えば1となる。

参考資料：http://www5b.biglobe.ne.jp/~simomac/uindou.htm
http://toretate.fc2web.com/toryo/030517/030517.html
http://simomath.blog.fc2.com/blog-entry-157.html
http://simomath.blog.fc2.com/blog-entry-157.html
http://syarekke.blog70.fc2.com/blog-category-38.html

著作者 著作権者：成清慎 akoto.narikiyo@gmail.com

付録：参考図1 61 奇数， 148 6a +4 型偶数，

317 ×3＋1→1552 $f(x)=3x+1$，$f:\{2a+1|a\in\mathbb{N}^0\}\to\{6a+4|a\in\mathbb{N}^0\}$ 写像
(全単射)



参考図2
$O.C.S.(27)$から開始して$O.C.H.(41,27)$以降$O.C.H.(\ldots,\ldots)$の継続実行で
$D(1)$を得て1に至る様子を図示